Curso Preparación y Evaluación Social de Proyectos
Sistema Nacional de Inversiones

MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Gobierno
de Chile

Edición:
02-05-17

División de Evaluación Social de Inversiones
MINISTERIO DE DESARROLLO SOCIAL

T E M A R I O

PREPARACIÓN DE PROYECTOS:

1. Sistema Nacional de Inversiones (e-learning)
2. El Ciclo de Vida de los Proyectos (e-learning)
3. Análisis y solución del problema
4. Diagnóstico de la situación actual
5. Identificación de alternativas de solución

EVALUACIÓN DE PROYECTOS:

6. Conceptos Básicos
7. Flujo de Beneficios Netos
8. **Matemáticas Financieras**
9. Criterios de Decisión
10. Elementos Básicos de Teoría Económica
11. Evaluación Social de Proyectos

Matemáticas Financieras

- Diagnóstico
- Análisis de Alternativas
- **Flujo de Beneficios y Costos**

MATEMATICAS FINANCIERAS: aplicada al flujo de fondos, entrega indicadores que corresponden a criterios de decisión de inversiones.

- **Criterios de Decisión**

Temario del Módulo

1. Matemáticas Financieras
2. Valor del Dinero en el Tiempo
3. Interés Simple e Interés Compuesto
4. Valor Actual y Valor Futuro
5. Tasa de Interés Equivalente
6. Anualidades
7. Inflación

1. Matemáticas Financieras

Definición

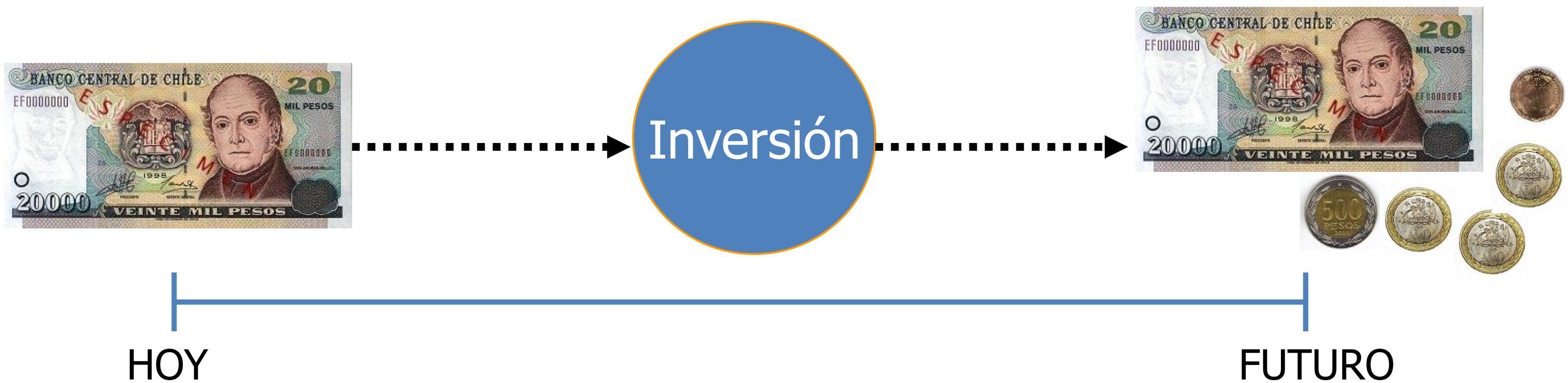
Corresponde a una derivación de la matemática aplicada, que provee un conjunto de herramientas que permiten analizar cuantitativamente, la viabilidad o factibilidad económica y financiera de las decisiones de inversión o financiación.

Permite decidir sobre las siguientes operaciones financieras:

- Inversiones
- Financiamiento
- Cobertura
- Crecimiento
- Diversificación
- Nuevos negocios
- Valoración de empresas
- Alianzas estratégicas

2. Valor del Dinero en el Tiempo

"**Un peso hoy vale más que un peso mañana**", ya que existe un costo de oportunidad del capital invertido, que es reflejado en la tasa de interés o de descuento (r).



Sacrificar consumo hoy debe compensarse en el futuro, ya que un monto puede ser invertido hoy ganando una rentabilidad futura.

La **tasa de interés** (o de rentabilidad) **r**, es la variable que determina la equivalencia de un monto de dinero en dos periodos distintos de tiempo.

2. Valor del Dinero en el Tiempo

Ejemplo: Un individuo obtiene hoy un ingreso de $1.000 por una sola vez y decide no consumir nada hoy. Luego, tiene la opción de poner el dinero en el banco.

¿Cuál será el valor de ese monto dentro de un año si la tasa de interés o de rentabilidad (r) que puede obtener en el banco es de 10% anual? (r = 10 % = 0,10)

$$1.000 + 1.000*(0{,}10)$$

$$1.000 + 100 = \underline{1.100}$$

HOY

PERIODO 0
AÑO 0

FUTURO

PERIODO 1
AÑO 1

3. Interés Simple e Interés Compuesto

Interés simple

El interés se aplica siempre sobre el capital invertido inicial, capitalizándose periodo a periodo.

Es de fácil obtención pero poco utilizado en el cálculo financiero.

$$I_s = C_0 \times r \times t \qquad C_f = C_0 + I_s \qquad \boxed{C_f = C_0 + C_0 \times r \times t}$$

I_s: Interés simple **C_0:** Capital inicial **r:** tasa **t:** período tiempo **C_f:** Capital final

Ejemplo: capital inicial $1.000, tasa del 10% a 4 años. El interés se calcula sobre el capital inicial y se aplica año a año en forma constante.

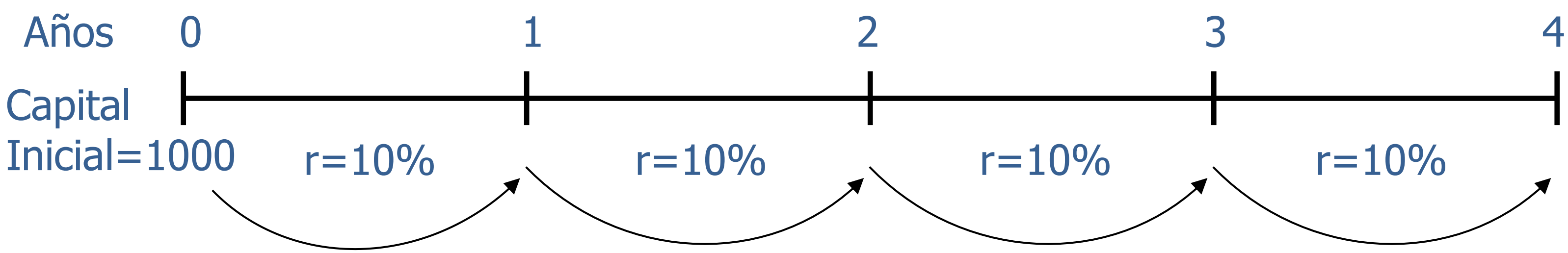
	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4
Intereses	100	100	100	100
Capital final	1.100	1.200	1.300	1.400

$$1.000 + 1.000 \times 10/100 \times 4 = 1.400$$

3. Interés Simple e Interés Compuesto

Interés compuesto

El monto inicial se va capitalizando periodo a periodo, por lo que luego del primer periodo se suma el capital más los intereses ganados y este total es el que gana intereses para un segundo periodo.



	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4
Intereses	100	110	121	133,1
Capital final	1.100	1.210	1.331	1.464

$$\boxed{C_0 \times (1+r)^t = C_f}$$

$$1.000 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right)^4 = 1.464$$

4. Valor Actual y Valor Futuro

VALOR FUTURO (VF)

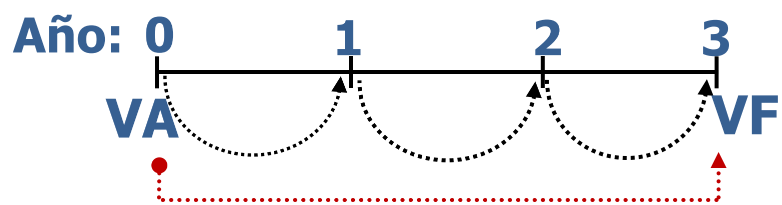
Cantidad de dinero que alcanzará una inversión en una fecha futura al ganar intereses a una tasa de interés compuesto.

Sólo 1 periodo

$$VF = VA \times (1+r)$$

Donde:
r = tasa de interés

Si son 3 periodos



$$VF = VA \times (1+r) \times (1+r) \times (1+r) = VA \times (1+r)^3$$

Caso General:

$$\boxed{VF = VA \times (1+r)^n}$$

4. Valor Actual y Valor Futuro

Ejemplo VF

Si se tiene $1.000 hoy y la tasa de interés anual es de 12%.
¿Cuál será su valor al final del tercer año?

Año 0: 1.000
Año 1: 1.000 * (1+0,12) = 1.120
Año 2: 1.120 * (1+0,12) = 1.254
Año 3: 1.254 * (1+0,12) = **1.405**

Alternativamente:

$$VF = 1.000 * (1+0,12)^3 = 1.000 * 1,4049 = \mathbf{1.405}$$

VALOR ACTUAL (VA)

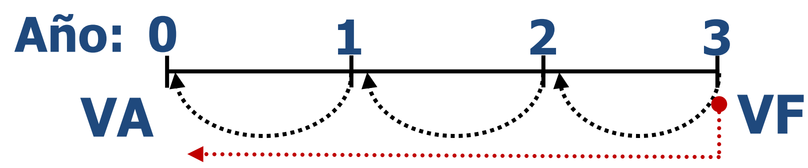
Valor presente (al día de hoy) de una suma que se recibirá en una fecha futura a una tasa dada.

Sólo 1 periodo

$$VA = \frac{VF}{(1+r)}$$

Donde:
r = tasa de interés

Si son 3 periodos



$$VA = \frac{VF}{(1+r)\times(1+r)\times(1+r)} = \frac{VF}{(1+r)^3}$$

Caso General:

$$\boxed{VA = \frac{VF}{(1+r)^n}}$$

4. Valor Actual y Valor Futuro

Ejemplo VA:

Si en cuatro años más necesito tener $ 3.300 y la tasa de interés anual es de 15%.
¿Cuál es el monto que requiero depositar hoy para lograr la meta?

Año 4:	3.300
Año 3:	3.300 / (1+0,15) = 2.869,6
Año 2:	2.869,6 / (1+0,15) = 2.495,3
Año 1:	2.495,3 / (1+0,15) = 2.169,8
Año 0:	2.169,8 / (1+0,15) = **1.886,8**

Alternativamente:

$$VA = 3.300 / (1+0,15)^4 = 3.300 / 1,749 = \mathbf{1.886,8}$$

4. Valor Actual y Valor Futuro

Ejemplo de tasa:

Si los $1.000 de hoy equivalen a $1.643 al final del año 3.
¿Cuál será la tasa de interés anual relevante?

$$VF = 1.000 * (1+r)^3 = 1.643$$

$$(1+r)^3 = 1.643/1.000$$

$$(1+r)^3 = 1,64$$

$$(1+r) = (1,64)^{1/3}$$

$$1+r = 1,18$$

$$r = 0,18 = \mathbf{18\%}$$

5. Tasa de Interés Equivalente

Si se tiene una tasa de interés anual r_a, la tasa de interés mensual equivalente r_m puede ser calculada usando las siguientes expresiones:

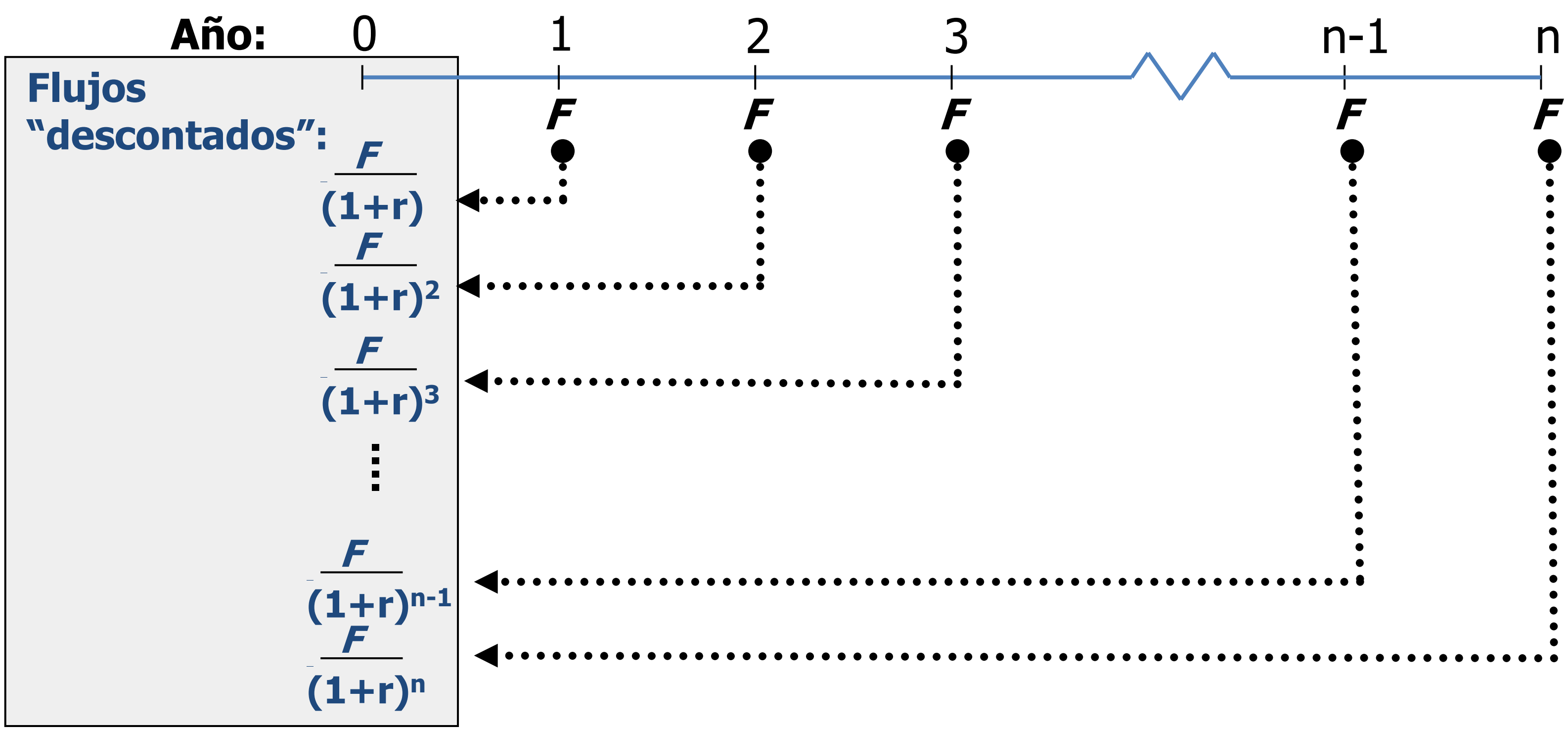
Con interés compuesto: $$\boxed{r_m = (1+ra)^{1/12} - 1}$$

Este ejemplo se hace extensivo a cualquier unidad de tiempo.

6. Anualidades

Sucesión de pagos iguales realizados en períodos regulares de tiempo, aplicando interés compuesto.

Considere un flujo F (anualidad) por <u>montos iguales</u> que se paga <u>al final de todos los años</u> por un período de tiempo **n** a una tasa **r**.



6. Anualidades

El **Valor Actual** de esa anualidad (F) que implica la suma de todos esos flujos actualizados al momento 0 se define como:

$$VA = F \times \frac{1}{(1+r)^1} + F \times \frac{1}{(1+r)^2} + F \times \frac{1}{(1+r)^3} + \ldots + F \times \frac{1}{(1+r)^n}$$

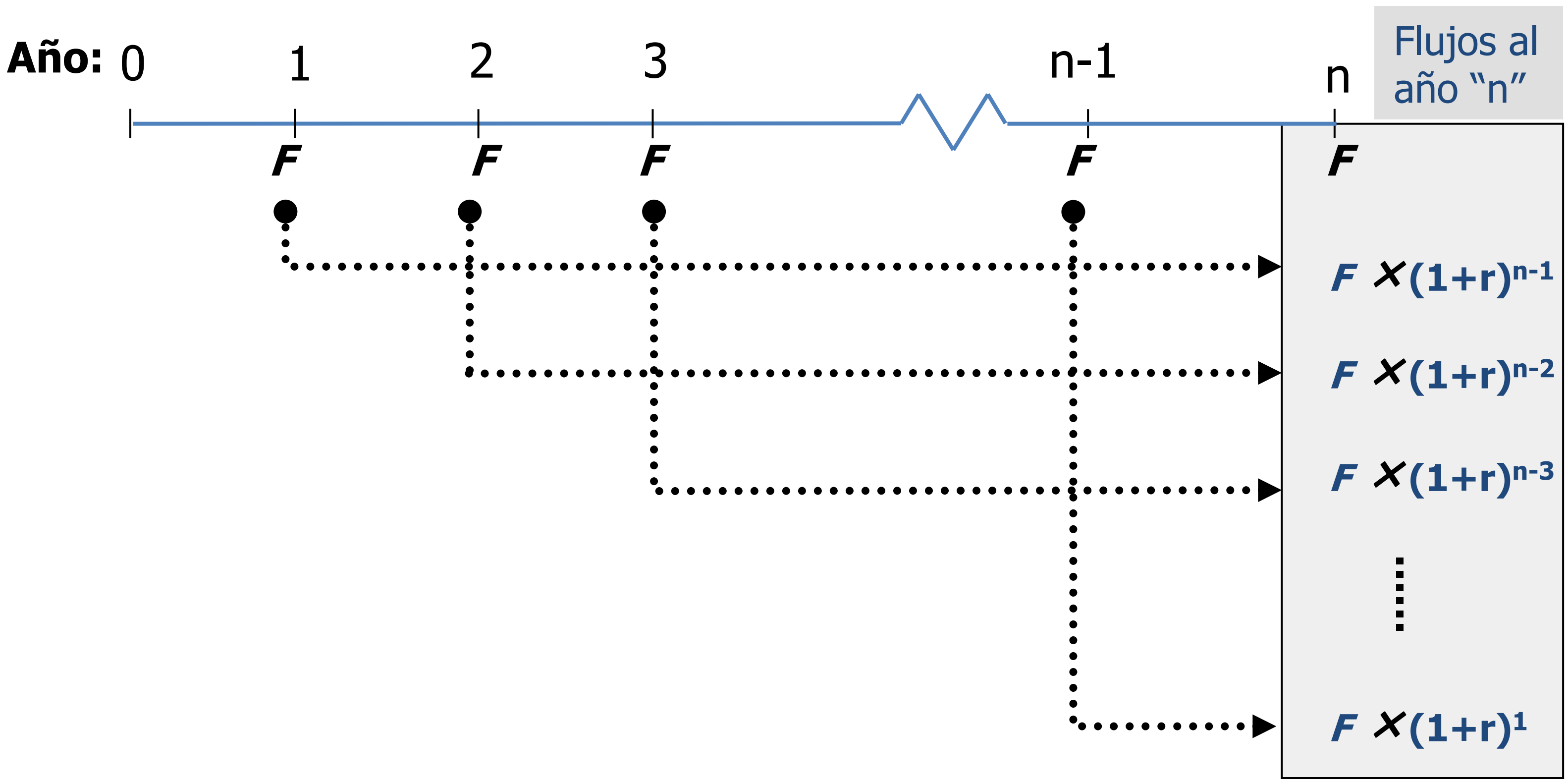
$$\boxed{VA = F \times \frac{(1+r)^n - 1}{r \times (1+r)^n}}$$

Nota: una anualidad F es representativa de indicadores como Valor Anual Equivalente y Costo Anual Equivalente, utilizados en la evaluación de los proyectos.

$$\boxed{F = VA \times \frac{r \times (1+r)^n}{(1+r)^n - 1}}$$

6. Anualidades

Considere un flujo F (anualidad) por montos iguales que se paga al final de todos los años por un período de tiempo **n** a una tasa **r**.



6. Anualidades

Como contrapartida al Valor Actual de un flujo se tiene:

El **Valor Futuro** de una anualidad (F) que implica la suma de todos esos flujos <u>llevados al periodo **n**</u> se define como:

$$VF = F \times (1 + r)^{n} + F \times (1 + r)^{n-1} + \ldots + F$$

Y resolviendo esta serie con la constante F, queda de la siguiente manera:

$$\boxed{VF = F \times \frac{(1 + r)^{n} - 1}{r}}$$

6. Anualidades

Ejemplo anualidad:

Suponga que usted pagó cuotas mensuales de $250.000 por la compra de un auto durante 2 años (24 meses) a una tasa de 1% mensual.

¿Cuál fue el valor del préstamo?

$$VA = 250.000 \times \frac{(1 + 0{,}01)^{24} - 1}{0{,}01 \times (1 + 0{,}01)^{24}} = 5.310.847$$

6. Anualidades

Ejemplo anualidad:

Suponga usted trabajará durante 30 años, su cotización en la AFP será de $20.000 mensuales, si la AFP le ofrece una rentabilidad mensual de 0,5%

¿Cuál será el monto que tendrá su fondo al momento de jubilar?

$$VF = 20.000 \times \frac{(1 + 0,005)^{360} - 1}{0,005} = 20.090.301$$

6. Anualidades

Ejemplo anualidad:

Suponga usted comprará una casa que vale hoy $20.000.000 y solicita al banco un crédito por el total del valor a 15 años plazo (180 meses). La tasa de interés es de 0,5% mensual.

¿Cuál deberá ser el valor del dividendo mensual?

Si: $VA = F \times \dfrac{(1+r)^n - 1}{r \times (1+r)^n}$

Entonces: $\boxed{F = VA \times \dfrac{r \times (1+r)^n}{(1+r)^n - 1}}$

Así: $$F = 20.000.000 \times \frac{0{,}005 \times (1 + 0{,}005)^{180}}{(1 + 0{,}005)^{180} - 1} = 168.771$$

6. Anualidades

PERPETUIDAD: Flujo constante que se paga infinitamente.

Ejemplo perpetuidad:

Suponga que usted decide jubilar a los 50 años y recibirá una renta vitalicia de $500.000 mensuales hasta que muera. La tasa de interés relevante es de 1% mensual y la empresa que le dará la renta supone una "larga vida" para usted (podría llegar a los 90, tal vez 95, o hasta los 100 años) ¿Cuál es el valor actual del fondo que la empresa debe tener para poder cubrir dicha obligación?

Usando la fórmula de VA de una Anualidad (no perpetua) se tendría:

Si vive **90** años: VA = $ 49.578.580

Si vive **95** años: VA = $ 49.768.030

Si vive **100** años: VA = $ 49.872.310

Todos muy cercanos a $50 millones

$$\boxed{VA_p = \frac{F}{r}}$$

$$VA = \frac{500.000}{0,01} = 50.000.000$$

7. Inflación

- Aumento sostenido en el nivel general de precios. Normalmente medido a través del cambio en el Índice de Precios al Consumidor.
- En presencia de inflación (π), la capacidad de compra o poder adquisitivo de un monto de dinero es mayor hoy que en un año más.

Periodo 0
(Año 0)
$20.000

Periodo 1
(Año 1)
$20.000

Si **π** = 25%

7. Inflación

Inflación y Tasa de Interés

- Tasa de interés real **(r)**: Representa el costo de oportunidad.
- Tasa de inflación **(π)**: Representa la pérdida de poder adquisitivo.
- Tasa de interés nominal **(i)**: Representa simultáneamente el costo de oportunidad y la pérdida de poder adquisitivo. Corresponde a la tasa observada en el mercado.

Para conocer un valor en <u>términos reales</u> se deberá **deflactar**, esto es, transformar su valor nominal en un valor real al descontarlo con la tasa de inflación:

$$(1+r)=\frac{(1+i)}{(1+\pi)}$$

Entonces, el interés nominal quedará definido por:

$$\boxed{(1+i)=(1+r)\times(1+\pi)}$$

7. Inflación

Ejemplo:

Si un banco ofrece una tasa de interés nominal de 5% en un año y la inflación esperada en ese período es de un 3,7% ¿cuál es el interés real que se obtendría?

$$(1+r)=\frac{(1+i)}{(1+\pi)}$$

$$(1+r)=\frac{(1+0,05)}{(1+0,037)}$$

$$(1+r)=\frac{1,05}{1,037}$$

$$(1+r)=1,01253$$

$$r=0,01253$$

$$r=1,253\%$$

$$(1+i)=(1+r)\times(1+\pi)$$

$$i=\pi+r+r\times\pi$$

dado que $r\times\pi$ suele ser un valor muy pequeño, se puede omitir, por lo que:

$$\boxed{i \approx \pi + r}$$

7. Inflación

<u>Ejemplo</u>:

Si invierto $1.000 el 1° de enero y quiero obtener una rentabilidad del 10% real y se espera que el año cierre con un 5% de inflación ¿qué monto debería recibir el 31 de diciembre?

$$(1+i)=(1+r)\times(1+\pi)$$

$$(1+i)=(1+0,1)\times(1+0,05)$$

$$(1+i)=1,1 \times 1,05$$

$$(1+i)=1,155$$

$$i=1,155 - 1$$

$$i=0,155$$

$$i=15,5\%$$

$$VF_i=1.000 \times 1,155$$

$$VF_i=1.155$$

7. Inflación

- Los flujos pueden expresarse en moneda real (o "constante": UF, UTM o pesos de una misma fecha) o en moneda nominal (o "corriente": $ de cada año).

- La evaluación de proyectos en el SNI utiliza tasas de interés reales y por tanto flujos reales. Esto implica que al proyectar los flujos futuros, no se les aplica la tasa de inflación, es decir, las proyecciones se realizan valorándolas a precios del año 0.

- De esta forma se evita trabajar con inflaciones que normalmente tendrían que ser estimadas a futuro con el consiguiente problema de incertidumbre.

- Si se trabaja con flujos nominales se debe descontar a tasas nominales, llega al mismo resultado.

Gracias.

Gobierno de Chile

www.gob.cl